

Задача 9.1. Уравнението $x^2 + ax + b = 0$ има два корена x_1 и x_2 , които са естествени числа и за които е изпълнено равенството:

$$\frac{x_1 + 20}{x_1 - 20} = \frac{x_2 + 26}{x_2 - 26}.$$

Да се намери най-малката стойност на b .

Решение. Привеждаме под общ знаменател.

$$(x_1 + 20)(x_2 - 26) = (x_1 - 20)(x_2 + 26)$$

$$x_1x_2 + 20x_2 - 26x_1 - 20 \cdot 26 = x_1x_2 - 20x_2 + 26x_1 - 20 \cdot 26$$

Съкращаваме и получаваме $10x_2 = 13x_1$. Най-малките естествени числа, които удовлетворяват това равенство са $x_1 = 10$ и $x_2 = 13$. Тъй като $b = x_1x_2 = \frac{10}{13}x_2^2$, а най-малката стойност на b се получава при най-малката стойност на x_2 , то $b = 130$.

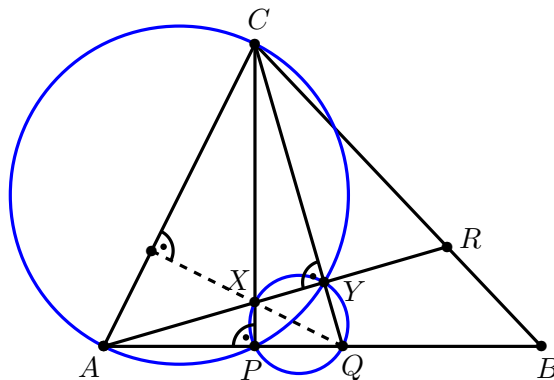
Оценяване. 1 т. за премахване на знаменателя; 1 т. за опростяване; 2 т. за най-малкото решение в естествени числа; 2 т. за довършване.

Задача 9.2. Точките P и Q са от страната AB (в ред A, P, Q и B), а точката R е от страната BC на триъгълник ABC . Отсечката AR пресича отсечките CP и CQ съответно в точки X и Y . Ако $APYC$ и $PQYX$ са вписани четириъгълници и $\angle ACB = 70^\circ$, да се намери ъгълът между правите QX и BC .

Решение. Тъй като $PQXY$ е вписан имаме $\angle XPQ + \angle XYQ = 180^\circ$. Тогава:

$$(1) \quad \angle APX + \angle CYX = (180^\circ - \angle XPQ) + (180^\circ - \angle XYQ) = 180^\circ.$$

Сега от вписания четириъгълник $APYC$ получаваме $\angle APX = \angle CYX$ и от (1) намираме $\angle APX = \angle CYX = 90^\circ$, т.е. X е ортоцентър за $\triangle AQC$. Следователно $QX \perp AC$ и от $\angle ACB = 70^\circ$ получаваме, че търсеният ъгъл е 20° .



Оценяване. 2 т. за $\angle APX = 90^\circ$ или $\angle CYX = 90^\circ$; 2 т. за намиране, че X е ортоцентър за $\triangle AQC$; 2 т. за довършване.

Задача 9.3. Да се реши в цели неотрицателни числа уравнението $x^3 + 16 = y^2$.

Решение. Първо да отбележим че $(0, 4)$ е решение. Да разгледаме остатъците на y^2 и x^3 по модул 9. Директно проверяваме, че в първия случай те са 0, 1, 4, 7 а във втория — 0, 1, 8. Тъй като $16 \equiv -2 \pmod{9}$, значи $y^2 \equiv 7 \pmod{9}$ и $x \equiv 0 \pmod{9}$. Следователно $x = 3z$ за някое цяло z .

Получаваме $27z^3 = (y - 4)(y + 4)$. Значи или $y - 4$ се дели на 27 или $y + 4$ се дели на 27.

1 сл. $y = 27k + 4$. Тогава $27z^3 = 27k(27k + 8)$. Нека $g = \gcd(27k, 27k + 8)$. Тъй като степента на 2 трябва да е кратна на 3, имаме $g = 1, 8$.

Ако $g = 1$, тогава $27k = u^3$ и $27k + 8 = w^3$. Но тогава $u^3 + 8 = w^3$ няма решение. Ако $g = 8$, тогава $27z^3 = 64(27k_1)(27k_1 + 1)$ и аналогично на предния случай ще стигнем до $u^3 + 1 = w^3$. Тогава $k_1 = 0$, следователно $z = 0$, $x = 0$ и стигаме до известното решение.

2 сл. $y = 27k - 4$. Имаме $27z^3 = 27k(27k - 8)$ и можем да приложим точно същият анализ.

Окончателно получаваме че други решения няма.

Оценяване. 2 т. за остатъците на квадратите по $\pmod{9}$; 1 т. за кратността на x ; 1 т. за представянето $27z^3 = (y - 4)(y + 4)$, 2 т. за 1 сл., 1 т. за довършване.

Бележка: Този тип диофантови уравнения се наричат уравнения на Мордел, а кривите от вида $y^2 = x^3 + ax + b$ се наричат елиптични криви и имат редица важни приложения.

Задача 9.4. В равнината са дадени 101 прави $l_1, l_2, \dots, l_{101}$ в общо положение (всеки две се пресичат и никои три не минават през една точка). Върху пресечната точка на правите l_i и l_j е записано числото $i + j$.

Множество A от k естествени числа е такова, че върху всяка права е записано поне едно число от A и ако махнем произволно число от A съществува права, върху която няма записано число от новото множество. Да се намерят всички възможни стойности на k .

Решение. Ще докажем, че възможните стойности са $k = 2, 3, 4$.

Ако $k = 1$, то $A = \{a\}$ и при $a \leq 101$ върху правата 101 няма число, при $a = 102$ върху правата 51 няма число и при $a \geq 103$ върху правата 1 няма число.

При $k = 2$ множеството $A = \{102, 52\}$ е хубаво.

При $k = 3$ множеството $A = \{105, 4, 3\}$ е хубаво.

При $k = 4$ множеството $A = \{106, 108, 6, 4\}$ е хубаво.

Нека $k \geq 5$. Ясно е, че или има три числа $a < b < c \leq 101$ или има три числа $102 \leq m < n < p$.

Нека $a < b < c \leq 101$. Ще покажем, че на всички прави, на които се среща числото a се среща някое от числата b или c . Нека на права x се среща числото a . Следователно съществува y , за което $x + y = a$. Тогава $x + (b - x) = b$ и $x + (c - x) = c$, като $101 > b > b - x > a - x = y \geq 1$ и $101 \geq c > c - x > a - x = y \geq 1$. Тъй като $x = b - x$ и $x = c - x$ не са възможни едновременно, то поне в единия сбор $x + (b - x) = b$

и $x + (c - x) = c$ двете събираеми са различни. Това означава, че на правата x се среща едно от числата b или c .

Нека $102 \leq m < n < p$. Ще покажем, че на всички прави, на които се среща числото p се среща някое от числата m или n . Нека на права x се среща числото p . Следователно съществува $1 \leq y \leq 101$, за което $x + y = p$. Тогава $x + (m - x) = m$ и $x + (n - x) = n$, като $1 \leq m - x < p - x = y \leq 101$ и $1 \leq n - x < p - x = y \leq 101$. Тъй като $x = m - x$ и $x = n - x$ не са възможни едновременно, то поне в единия сбор $x + (m - x) = m$ и $x + (n - x) = n$ двете събираеми са различни. Това означава, че на правата x се среща едно от числата m или n .

И в двата случая получихме противоречие, което означава че възможните стойности са $k = 2, 3, 4$.

Оценяване. 2 т. за примери и за трите стойности за k (1 т. за примери за две от възможните стойности за k); 3 т. за доказване, че не може да има три числа по-малки от 102 (или три числа по-големи от 101); 5 т. за доказване и на двете твърдения.